

LNF - 66/6
14 Febbraio 1966

F. Amman: DIMENSIONI DEI FASCI, VITE MEDIE, LUMINO-
SITA' E CARATTERISTICHE DELLA ZONA DI INTERAZIONE
IN ADONE. -

Nota interna: n. 306
14 Febbraio 1966

F. Amman: DIMENSIONI DEI FASCI, VITE MEDIE, LUMINOSITA' E CARATTERISTICHE DELLA ZONA DI INTERAZIONE IN ADONE.

I - INTRODUZIONE -

Sono presentate in questa nota alcune considerazioni sulle proprietà dei fasci e dell'incrocio in anelli di accumulazione, con dati numerici approssimati validi per l'anello Adone. Calcoli più accurati sono in corso di esecuzione, ma, data la loro complessità, si ritiene comunque conveniente dare delle indicazioni semiquantitative, ma semplici, i cui limiti di validità sono indicati caso per caso.

Nella tabella I sono riportati alcuni dati costruttivi di Adone; per altri dati si rimanda a (1, 2).

Nella tabella II è riportato un elenco dei simboli di più frequente uso in questa nota.

TABELLA I

Caratteristiche principali di Adone.

- Energia massima	1.5 GeV
- Intensità, per fascio	2×10^{11} part.
- Tempo di accumulazione	~ 0.5 ore
- Zone di interazione libere per le esperienze	4
- Luminosità tipica a 1.5 GeV	10^{33} cm ⁻² ora ⁻¹
- Raggio medio	16.71 m
- Raggio di curvatura nei magneti	5 m
- Numero di periodi	12
- Numeri d'onda di betatrone (variabili)	3.1 ± 0.5
- Coefficiente di orbita chiusa ψ_M (per $Q_x = 3.2$)	1.91 m
	ψ_{min} 0.96 m
- Momentum compaction	6.12×10^{-2}
- Lunghezza libera delle sezioni diritte	2.5 m
- Apertura utile della ciambella: larghezza (dimensioni interne)	22 cm
	altezza 6 cm
- Costanti di tempo di smorzamento 360 MeV per le oscillaz. di betatrone: 1.500 MeV	800 msec
	11 msec
- Pressione del gas residuo	10^{-9} torr
- Numero e portata delle pompe al Ti	24×500 lt/sec
- Frequenza della radiofrequenza	8,58 Mc/sec
- Armonica k	3
- Cavità acceleranti	2×2
- Tensione totale per giro	150 kV
- Potenza ceduta al fascio a 1.5 GeV	18 kW
- Potenza a r.f. in ingresso alle cavità	190 kW
- Energia di iniezione: e^-	375 MeV
	e^+ 360 MeV
- Corrente dall'iniettore entro e^-	~ 75 mA
$\Delta p/p = \pm 1\%$ e^+	~ 0.3 mA
- Ripetizione degli impulsi di iniezione	$1.5 + 3$ imp/sec.

TABELLA II

Elenco dei simboli.

a, b	semiassi della zona libera della camera da vuoto, supposta ellittica; rispettivamente radiale e verticale.
$C_s = 2\pi R$	lunghezza dell'orbita sincrona
E_s	energia della particella sincrona
f	frequenza di rotazione nell'anello
f_{RF}	frequenza delle cavità a radiofrequenza
h	numero di incroci su un giro
$k = f_{RF}/f$	armonica della radiofrequenza
N	numero di elettroni o positroni in un fascio
$p = \Delta E/E_s$	differenza di energia relativa rispetto all'energia della particella sincrona
Q_x, Q_z	numeri d'onda delle oscillazioni di betatrone, rispettivamente radiali e verticali.
R	raggio medio dell'anello
V_{RF}	integrale su un giro del campo accelerante massimo
x, y, z	direzioni principali, rispettivamente radiale, azimutale e verticale
$\alpha = (\Delta C/C_s)/p$	"momentum compaction"
β_x, β_z	lunghezze d'onda locali di betatrone, rispettivamente radiali e verticali; i suffissi M e min si riferiscono ai valori massimi e minimi
$\gamma =$ δ	$E/(mc^2)$ angolo di incrocio, definito come il semiangolo tra le traiettorie dei due fasci collidenti
ξ_{RF}	accettanza relativa di radiofrequenza
$\Lambda = -\frac{1}{N} \frac{dN}{dt}$	coefficiente di perdita di un fascio
ξ	coefficiente di accoppiamento tra le oscillazioni di betatrone radiali e verticali; esso dà il rapporto tra le dimensioni medie verticali e quelle radiali di betatrone
$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \sigma_p$	radici quadrate dei valori quadratici medi (valori r. m. s.) delle distribuzioni di posizioni e di energie di un fascio
$\sigma_x^x, \sigma_y^x, \sigma_z^x, \sigma_p^x$	dimensioni r. m. s. e dispersione in energia r. m. s. della sorgente
$\psi_s = \arcsin\left(\frac{\Delta E_\gamma}{V_{RF}}\right)$	fase sincrona, essendo ΔE_γ la perdita media per irraggiamento su un giro
ψ	coefficiente di orbita chiusa; esso, moltiplicato per p, dà lo scostamento locale dell'orbita chiusa di una particella di energia $E_s(1+p)$ rispetto all'orbita sincrona.

II) DIMENSIONI DEI FASCI -

Le dimensioni radiali di equilibrio di un fascio di elettroni o positroni in un anello di accumulazione sono determinate principalmente da due processi:

- a) irraggiamento di sincrotrone⁽³⁾;
- b) scattering multiplo nel bunch (effetto Touschek multiplo)⁽⁴⁾.

Ambedue questi processi provocano delle variazioni istantanee di energia delle particelle (il primo attraverso l'emissione di un fotone, il secondo attraverso lo scambio di energia tra due particelle dello stesso pacchetto): la cavità a radiofrequenza rifornisce al fascio l'energia media perduta nel primo processo, dando uno smorzamento dei vari modi di oscillazione, ma la componente a valor medio nullo delle variazioni di energia provoca un processo di diffusione che, combinato con lo smorzamento, porta ad una distribuzione gaussiana dell'energia delle particelle.

A seconda dell'energia, dell'intensità e di altri parametri della macchina uno dei due processi è nettamente dominante rispetto all'altro: l'irraggiamento domina alle alte energie, l'effetto Touschek multiplo alle basse energie; inoltre l'irraggiamento dà un valore r. m. s. degli scarti relativi di energia rispetto all'energia sincrona

$$\sigma_p = \langle p^2 \rangle^{1/2}$$

che dipende solo dall'energia e dalla struttura magnetica della macchina, mentre l'effetto Touschek multiplo dà per σ_p un valore che dipende, seppur debolmente, anche dall'intensità, dalla tensione di radiofrequenza e dalle dimensioni verticali del fascio.

Nel caso di Adone, con $N = 2 \times 10^{11}$ part/fascio, $V_{RF} = 150$ kV, coefficiente di accoppiamento tra oscillazioni radiali e verticali $\xi = 1\%$ (e cioè dimensioni verticali del fascio nelle sezioni diritte pari a circa 1/200 di quelle radiali) l'effetto Touschek multiplo domina sino a $\gamma \simeq 1.250$; l'irraggiamento da $\gamma = 1.750$ in su; nell'intervallo tra $\gamma = 1.250$ e $\gamma = 1.750$, il valore di σ_p è praticamente costante; l'andamento di σ_p è rappresentato in fig. 1.

La funzione σ_p per γ compreso tra 500 e 1.250 è data all'incirca:

$$(II-1) \quad \sigma_p \simeq \frac{0.45}{\gamma} \left(\frac{1.000}{\gamma}\right)^{1/9} \left(\frac{N}{2 \times 10^{11}}\right)^{1/6} \left(\frac{V_{RF}}{150 \text{ kV}}\right)^{1/12} \left(\frac{10^{-2}}{\xi}\right)^{1/6}$$

per $\gamma > 1.750$ è invece data da:

$$(II-2) \quad \sigma_p = 1.95 \times 10^{-7} \gamma$$

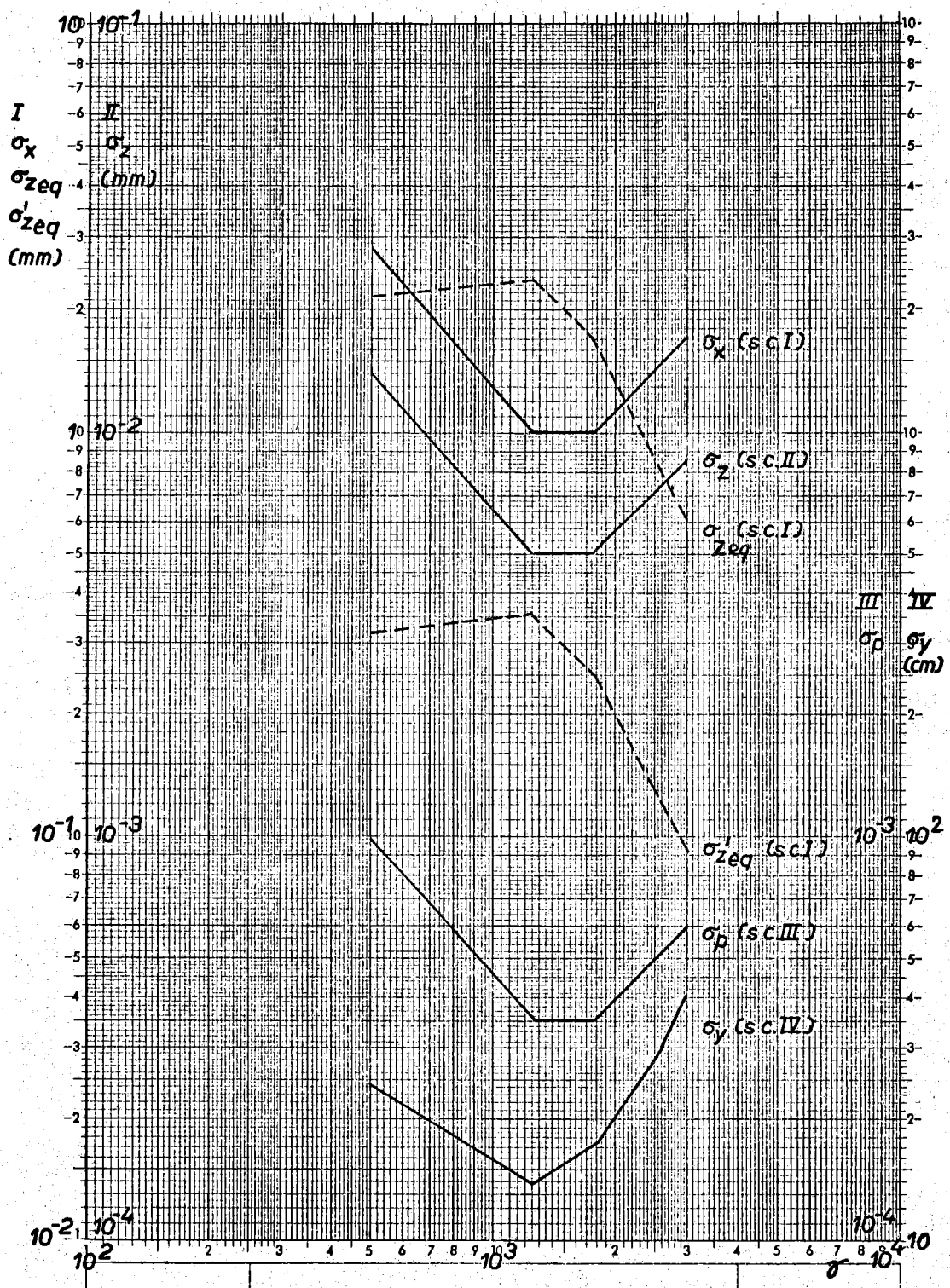


FIG. 1 - $\sigma_p, \sigma_x, \sigma_z, \sigma_y$

Valori r. m. s. delle distribuzioni in energia (σ_p) e in posizione ($\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$) delle particelle di un fascio in Adone.

Condizioni tipiche. $N = 2 \times 10^{11}$, $V_{RF} = 150$ kV, $\frac{\epsilon}{\xi} = 1\%$.

$\sigma_{zeq} = \sqrt{\sigma_z^2 + \delta^2 \sigma_y^2}$. Dimensioni verticali equivalenti necessarie per mantenersi al disotto del limite di carica spaziale.

Combinando la II-1 con la II-2 si può constatare che il valore di γ alla transizione tra il regime di scattering multiplo e quello dell'irraggiamento varia all'incirca con $(N/\xi)^{1/12}$, così come con $(N/\xi)^{1/12}$ varia il valore di σ_p nel regime di transizione.

La distribuzione radiale delle particelle è gaussiana, come la distribuzione delle energie; il suo valore r. m. s. nelle sezioni diritte è dato approssimativamente da:

$$(II-3) \quad \sigma_x = \psi_M \sigma_p \sqrt{1 + \left(\frac{\psi_{\min}}{\psi_M}\right)^2 \frac{\beta_{xM}}{\beta_{x\min}} \frac{J_s}{J_x}}$$

dove J_s e J_x sono i coefficienti di smorzamento delle oscillazioni di sincrotrone e di betatrone; per Adone si ha :

$$(II-4) \quad \sigma_x = 2.9 \times 10^3 \sigma_p \quad (\text{mm}).$$

Le dimensioni verticali del fascio sono determinate dall'accoppiamento dei modi di oscillazione di betatrone radiale e verticale, accoppiamento determinato dagli errori di allineamento dei magneti curvanti e dei quadrupoli, oppure provocato ad arte con campi longitudinali o con quadrupoli ruotati.

Il coefficiente d'accoppiamento minimo previsto in base agli errori di allineamento⁽⁵⁾ è $\xi = 1\%$; la distribuzione in verticale risulta ancora gaussiana, con un valore r. m. s. σ_z nelle sezioni diritte dato da :

$$(II-5) \quad \sigma_z = 0.5 \xi \sigma_x = 0.5 \times 10^{-2} \sigma_x = 14.5 \sigma_p \quad (\text{mm})$$

(il coefficiente 0.5 tiene conto del fatto che solo le oscillazioni di betatrone radiali, e non quelle di sincrotrone, sono accoppiate con quelle verticali, ed inoltre dei fattori di forma dei due modi di oscillazione nelle sezioni diritte).

Il valore dato dalla II-5 va considerato come il valore minimo ottenibile per la dimensione verticale dei fasci; probabilmente converrà lavorare con accoppiamenti maggiori (sino al 5%), e quindi con dimensioni verticali di altrettanto maggiori, per aumentare la vita media soprattutto nella regione tra 500 e 1000 MeV; come si vedrà più avanti, tale aumento delle dimensioni verticali non altera la situazione per quanto riguarda la luminosità all'incrocio.

La distribuzione azimutale delle particelle è proporzionale alla distribuzione in energia (e quindi è anch'essa gaussiana) e dipende da alcuni parametri della macchina e dall'energia; il valore r. m. s. è dato da:

$$(II-6) \quad \sigma_y = \sigma_p \frac{2R}{k} \left\{ \frac{\pi k \alpha \gamma}{2} \frac{mc^2}{V_{RF}} \frac{1}{\cos \psi_s} \right\}^{1/2}$$

Per $V_{RF} = 150$ kV e $\cos \psi_s \simeq 1$, cioè sino ad energie pari a circa 1.3 GeV ($\gamma \simeq 2600$) si ha:

$$(II-7) \quad \sigma_y = 11 \sigma_p \gamma^{1/2} \text{ (m)}$$

I fasci in un anello di accumulazione hanno quindi una distribuzione di posizioni gaussiana nelle tre direzioni principali, radiale, verticale ed azimutale; i valori r. m. s. delle tre distribuzioni sono proporzionali a σ_p ; come si è visto più sopra σ_p è essenzialmente proporzionale a $1/\gamma$ per γ inferiori a ~ 1.250 e proporzionale a γ per γ superiori a ~ 1.750 ; circa costante nell'intervallo tra 1.250 e 1.750.

Un cenno sulle approssimazioni: il valore di σ_p dovuto all'effetto Touschek multiplo, quale è riportato in fig. 1, è stato calcolato assumendo dimensioni dei fasci uniformi lungo la macchina, mentre, essendo Adone a foceggiamento forte, le dimensioni sono variabili da punto a punto; è difficile dire quale può essere l'errore che ne deriva ed il segno dell'errore stesso, ma non dovrebbe essere superiore a $\sim 10 \div 20\%$. Le dipendenze indicate nella II-1 vanno prese con precauzione: sono sufficientemente approssimate per variazioni relativamente piccole dei parametri (fattori ammissibili: su $N \sim 10^2$; su $V_{RF} \sim 10$, su $\beta \sim 10$).

La II-3 è abbastanza accurata nel regime di irraggiamento; nel regime di effetto Touschek multiplo il coefficiente che moltiplica $\psi_M \sigma_p$ per dare σ_x è diverso (compaiono dei valori medi di ψ e β^{-1} lungo tutta la macchina, invece che i valori ψ_{\min} e β_{\min}) e dovrebbe essere maggiore di circa il 10%.

La II-2 e la II-6 non contengono alcuna approssimazione.

III - VITE MEDIE -

I processi dominanti nel determinare le perdite delle particelle accumulate in Adone sono:

- a) scattering sul gas residuo;
- b) bremsstrahlung sul gas residuo;
- c) bremsstrahlung sull'altro fascio;
- d) scattering nel pacchetto (effetto Touschek).

La varietà dei modi di operazione dell'anello rende impossibile dare una formula od un grafico per la vita media dei fasci in funzione dell'energia. Ad es. la perdita per scattering sul gas, dipendendo da $1/\gamma^2$,

diviene importante alle basse energie: ma essa dipende anche da $1/b^2$, essendo b la semialtezza utile della ciambella, e b varia al variare dell'angolo di incrocio, diminuendo da 2,7 cm per angolo di incrocio zero a 0,7 cm per angolo di incrocio di 5 mrad. Analogo discorso vale per la perdita per effetto Touschek al variare del coefficiente di accoppiamento ξ .

Per i vari effetti si daranno quindi le dipendenze dai parametri che possono essere variati, e si daranno i valori calcolati in condizioni tipiche (in generale corrispondenti alle condizioni più pessimistiche).

L'espressione per il coefficiente di perdita sarà:

$$(III-1) \quad \Lambda = - \frac{1}{N_1} \frac{dN_1}{dt} = A_{sc} + A_{br} + B \frac{L}{N_1} + CN_1$$

dove A_{sc} , A_{br} , B e C sono quantità caratteristiche dei quattro processi sopra menzionati, rispettivamente scattering e bremsstrahlung sul gas residuo, bremsstrahlung sull'altro fascio, effetto Touschek; L è la luminosità.

L'integrazione della III-1 dipende da come varia la luminosità col tempo; nel caso semplice di geometria dell'incrocio costante (e quindi di L proporzionale al prodotto delle intensità dei due fasci), e di intensità iniziale dei due fasci eguale, il tempo di dimezzamento $T_{1/2}$ risulta:

$$(III-2) \quad T_{1/2} = \frac{1}{A_{sc} + A_{br}} \ln \left\{ 1 + \frac{A_{sc} + A_{br}}{A_{sc} + A_{br} + B \frac{L_0}{N_0} + CN_0} \right\}$$

avendo indicato con N_0 ed L_0 i valori iniziali di intensità e luminosità.

In pratica consideriamo come tempo caratteristico l'inverso di Λ , che corrisponde al tempo di dimezzamento per $A_{sc} + A_{br} \rightarrow 0$, mentre tende a $1,44 T_{1/2}$ nel limite opposto di $B \rightarrow 0$ e $C \rightarrow 0$; ciò che chiameremo "vita media" è quindi il tempo Λ^{-1} dopo il quale l'intensità del fascio è ridotta ad una frazione compresa tra $1/2$ e $1/2,72$ dell'intensità iniziale.

a) Scattering sul gas residuo.

Il coefficiente di perdita è⁽⁶⁾:

$$(III-3) \quad A_{sc} = C \sum_i N_i \frac{C 4r_e^2}{\gamma^2 \theta_o^2} = 3,53 \times 10^{16} \sum_i n_i P_i Z_i^2$$

dove con n_i viene indicato il numero di atomi nella molecole di specie i , presente con una pressione parziale P_i in torr, e con Z_i^2 il numero atomico quadratico medio degli atomi componenti la molecola di specie i .

θ_o^2 è l'angolo di taglio dovuto alla ciambella:

$$(III-4) \quad \frac{1}{\theta_o^2} = \frac{\pi}{2} \left(\frac{R \beta_{xM}}{Q_x a^2} + \frac{R \beta_{zM}}{Q_z b^2} \right)$$

Poichè $Q_x \simeq Q_z = Q$; $\beta_{xM} \simeq \beta_{zM} = \beta_M$ e $b^2/a^2 \ll 1$, si può scrivere:

$$(III-5) \quad \frac{1}{\theta_o^2} \simeq \frac{\pi}{2} \frac{R \beta_M}{Q} \frac{1}{b^2}$$

e sostituendo nella III-3:

$$(III-6) \quad A_{sc} = 2.7 \times 10^8 \frac{\sum n_i P_i Z_i^2}{\gamma^2 b_{cm}^2} \quad (\text{sec}^{-1})$$

$$= 9.7 \times 10^{11} \frac{\sum n_i P_i Z_i^2}{\gamma^2 b_{cm}^2} \quad (\text{ore}^{-1})$$

In fig. 2 è riportato l'andamento di A_{sc} calcolato nell'ipotesi di $b = 2 \text{ cm}$ e con la seguente composizione del gas residuo (composizione che possiamo considerare tipica alla pressione totale di 10^{-9} torr):

Gas	P_i/P_{tot}	$n_i Z_i^2$	$(P_i/P_{tot}) n_i Z_i^2$
N_2 (o CO)	0.45	98	44
CO_2	0.25	164	41
H_2O (o OH o CH_4)	0.25	66	17
A	0.05	324	16
$\sum \frac{P_i}{P_{tot}} n_i Z_i^2$			118

Questa composizione di gas residuo (determinata in base a molte misure effettuate a Frascati in vari sistemi di prova) corrisponde ad un gas biatomico con $\langle Z^2 \rangle^{1/2} = 7.7$ e $\langle Z \rangle = 7.6$.

b) Bremsstrahlung sul gas residuo (nuclei ed elettroni atomici).

Il coefficiente di perdita è (6, 7):

$$(III-7) \quad A_{br} = C \frac{16}{3} \frac{r_e^2}{137} \left(-\ln \xi_{RF} - \frac{5}{8} \right) 3.53 \times 10^{16} \sum n_i P_i Z_i (Z_i + J_i) \ln \frac{183}{Z_i^{1/3}}$$

$$\simeq 17.5 \left(-\ln \xi_{RF} - \frac{5}{8} \right) \sum n_i P_i Z_i^2 \quad (\text{sec}^{-1})$$

$$= 6.3 \times 10^4 \left(-\ln \xi_{RF} - \frac{5}{8} \right) \sum n_i P_i Z_i^2 \quad (\text{ore}^{-1})$$

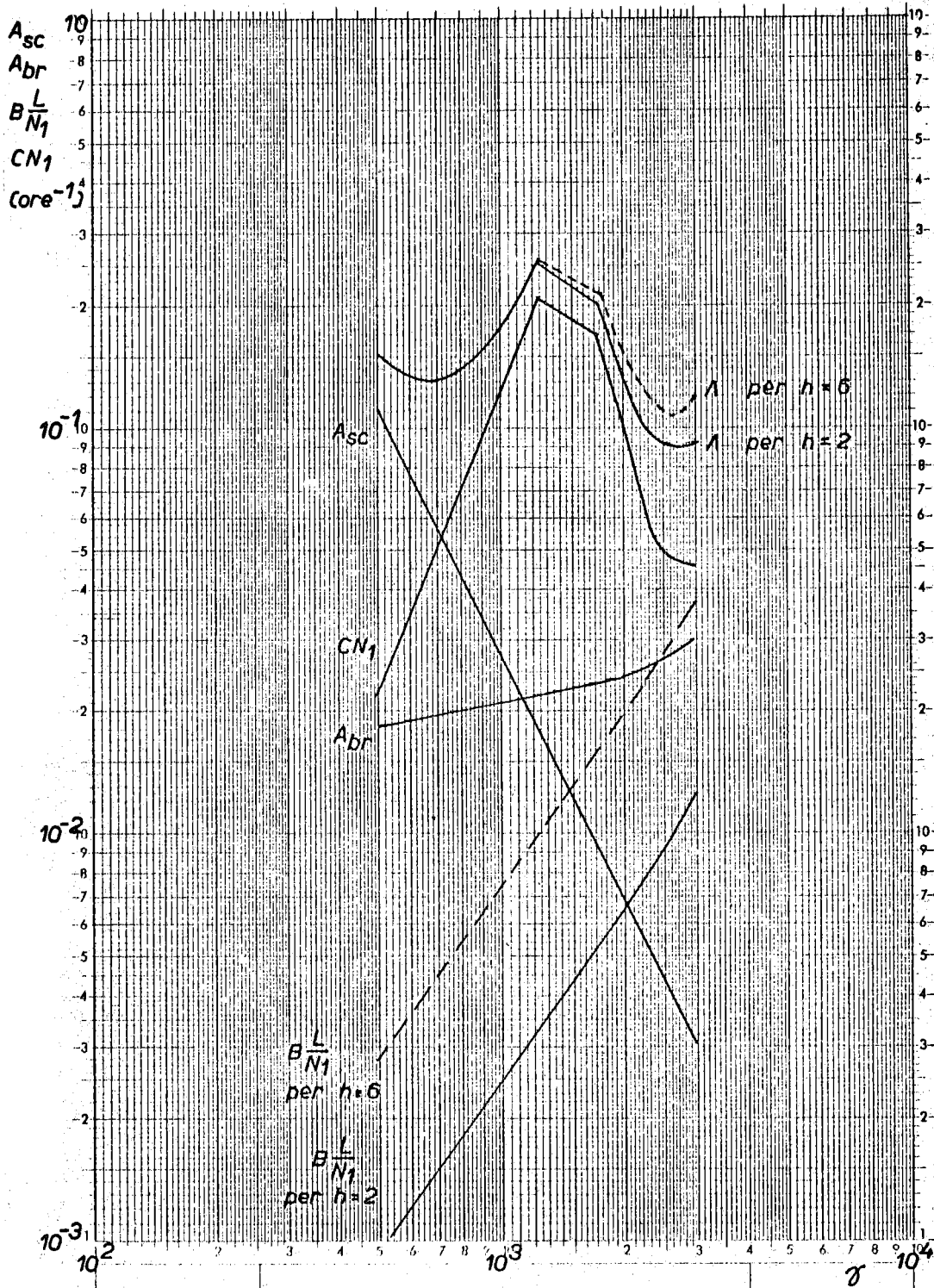


FIG. 2 - Coefficienti di perdita per scattering e bremsstrahlung sul gas residuo (A_{sc} e A_{br}), per bremsstrahlung fascio-fascio (BL/N_1) e per effetto Touschek (CN_1), e coefficiente di perdita iniziale totale (Λ).

Condizioni tipiche: dimensioni fascio come in fig. 1; composizione gas come nel testo, con $P = 10^{-9}$ torr; $L = 5 \times 10^{33} (\gamma/3000)$ $\text{cm}^{-2}\text{ora}^{-1}$; semialtezza della ciambella $b = 2$ cm; numero di incroci: 2 casi $h = 2$ e $h = 6$.

assumendo, per lo Z_i che compare sotto logaritmo e per determinare il valore di J , il valore 7,7, e trascurando un termine lineare in ϵ_{RF} . Essendo $J = 1,30$, il contributo degli elettroni atomici è pari a circa il 17% del contributo dei nuclei.

In fig. 2 è riportato l'andamento di A_{br} in funzione dell'energia, prendendo per il gas residuo la composizione tipica sopra riportata alla pressione totale di 10^{-9} torr, e nell'ipotesi che la tensione di radiofrequenza sia $V_{RF} = 150$ kV; in fig. 3 è rappresentato l'andamento dell'accettanza relativa in energia ϵ_{RF} per $V_{RF} = 150$ kV e la corrispondente accettanza assoluta ΔE_{RF} in MeV; da notare che per γ minore di circa 400 l'accettanza è limitata dalle dimensioni radiali della ciambella. L'accettanza è definita come lo scarto massimo in energia, in più o in meno rispetto all'energia sincrona, compatibile con la stabilità di fase della particella.

c) Bremsstrahlung sull'altro fascio.

Il coefficiente di perdita è

$$(III-8) \quad B \frac{L}{N_1} = h \sigma_{br} \frac{L}{N_1}$$

dove σ_{br} è la sezione d'urto di bremsstrahlung fascio-fascio⁽⁸⁾ e h è il numero di incroci lungo la circonferenza della macchina. La perdita è proporzionale alla luminosità, e quindi le condizioni peggiori si hanno in corrispondenza ai massimi valori della luminosità; assumiamo $L = 5 \times 10^{33} (\gamma/3000) \text{cm}^{-2} \text{ora}^{-1}$, valore maggiore della luminosità tipica di progetto (vedere più avanti, par. IV), ma che pure potrebbe essere ottenuto.

$$(III-9) \quad \sigma_{br} = \frac{16}{3} \frac{r_e^2}{137} \left\{ (\ln 4\gamma^2 - \frac{1}{2}) (-\ln \epsilon_{RF} - \frac{5}{8}) + \frac{1}{2} (\ln \epsilon_{RF})^2 - \right. \\ \left. - \frac{\pi^2}{6} - 1.85 \frac{3}{8} + 2.14 \frac{3}{8} (\ln \epsilon_{RF} + 1) \right\}$$

In fig. 2 è riportato l'andamento del coefficiente di perdita per bremsstrahlung fascio-fascio sia nel caso di due incroci ($h=2$) che nel caso di sei incroci ($h=6$).

d) Scattering nel pacchetto (effetto Touschek).

Il coefficiente di perdita per lo scattering elastico delle particelle in un bunch, nel limite di velocità trasverse non relativistiche, è dato da⁽⁹⁾:

$$(III-10) \quad CN_1 = \frac{\sqrt{\pi} r_e^2 c}{2 \gamma^3 k \text{Vol}} \frac{N_1}{\epsilon_{RF}^2} \frac{R}{Q_x \sigma_{x/\lambda}} F(\lambda) \quad (\text{sec}^{-1}),$$

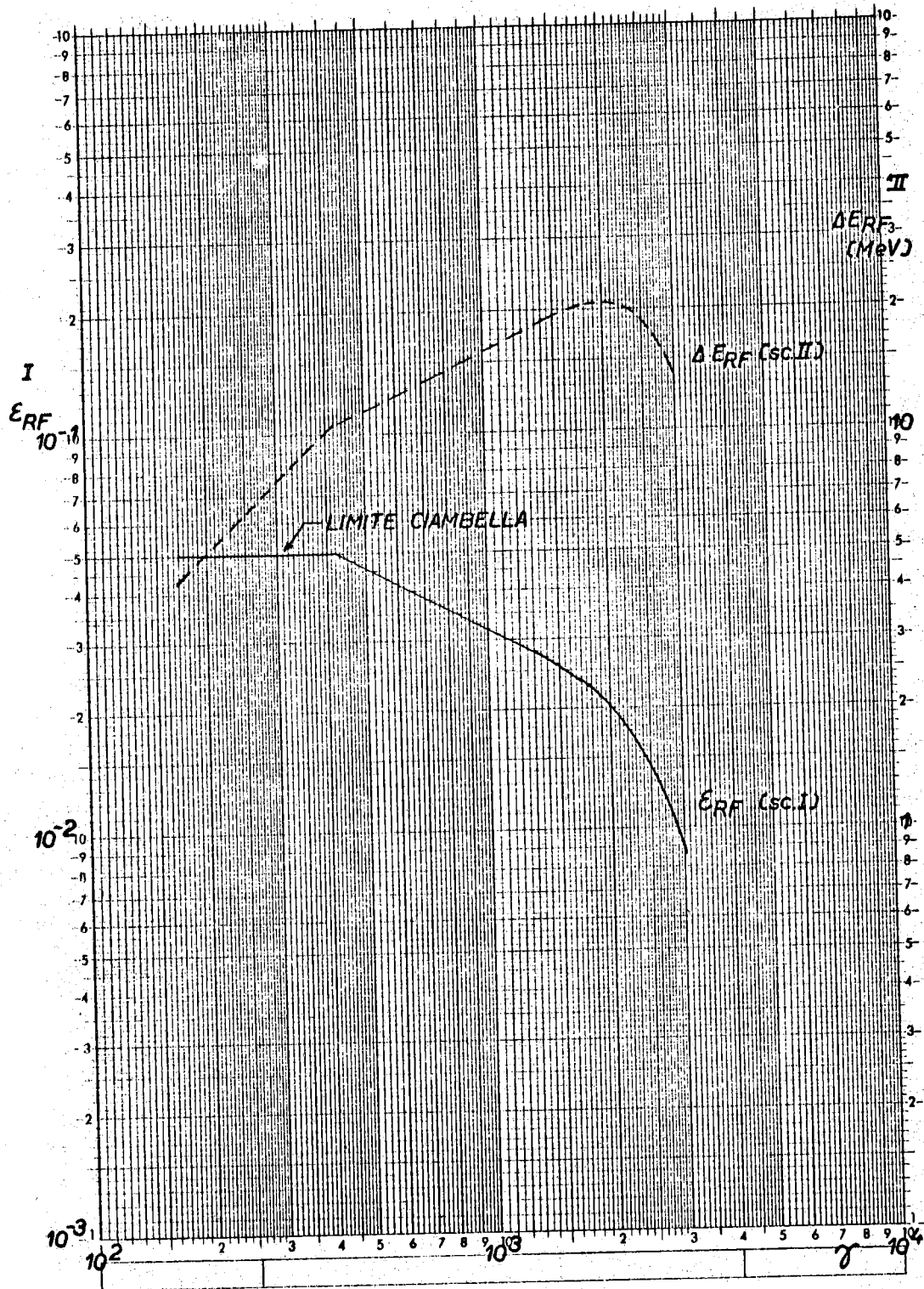


FIG. 3 - Accettanza in energia dell'anello: relativa (ϵ_{RF}) e assoluta (ΔE_{RF}) per $V_{RF} = 150$ kV.

dove :

$$(III-11) \quad F(\lambda) = 2 \int_1^{\infty} \frac{e^{-\lambda t^2}}{t^2} (t^2 - 1 - \ln t) dt$$

e

$$(III-12) \quad \lambda = \frac{\xi_{RF}^2}{\gamma^2} \frac{R^2}{\sigma_{x/\beta}^2 Q_x^2} ; \quad Vol = 8 \pi^{3/2} \sigma_x \sigma_y \sigma_z .$$

L'approssimazione non relativistica è valida per $\frac{\gamma \sigma_{x/\beta} Q_x}{R} \ll 1$: in Adone tale rapporto, pur essendo sempre minore di 1, non è molto minore di 1; calcoli numerici eseguiti da M. Bassetti e C. Pellegrini, tenendo conto delle correzioni relativistiche, hanno mostrato che l'errore che si compie calcolando il coefficiente di perdita con l'approssimazione non relativistica per Adone è sempre inferiore al 10%.

La III-10 contiene però altre approssimazioni: inanzitutto si assume che le particelle del fascio abbiano momenti trasversi solo radiali (che cioè le dimensioni verticali siano completamente trascurabili rispetto a quelle radiali); inoltre si fa l'ipotesi che le dimensioni del fascio e le distribuzioni dei momenti trasversi siano uniformi lungo la macchina, mentre, come già si è detto a proposito delle dimensioni del fascio, ciò non accade in un foccheggiamento forte.

Quali possano risultare le correzioni dovute alle approssimazioni fatte, è assai difficile dirlo; non dovrebbero però essere superiori al 10-20%, almeno sinchè le dimensioni verticali restano dell'ordine di qualche per cento di quelle radiali. Come già detto nell'Introduzione, sono in corso di esecuzione calcoli numerici accurati su questo argomento.

Riprendendo la formula approssimata III-10, è chiaro che CN_1 , dipendendo dal volume del fascio e dai momenti trasversi, dipende da σ_p^4 , e quindi, nell'intervallo di energie in cui le dimensioni sono determinate dall'effetto Touschek multiplo, dall'intensità e dall'accoppiamento ξ ; tale dipendenza è complicata dal fatto che anche il parametro λ , definito dalla III-12, dipende da σ_p^2 ; in corrispondenza dei valori tipici di Adone, $F(\lambda)$ è circa proporzionale a $\lambda^{-1/2}$, cioè a σ_p . Si può quindi concludere, ricordando la II-1, che per valori di energia e di intensità per i quali le dimensioni sono determinate dall'effetto Touschek multiplo, la dipendenza del coefficiente di perdita per effetto Touschek singolo dall'intensità e dal coefficiente di accoppiamento è del tipo:

$$(III-13) \quad CN_1 \sim \frac{N_1}{\xi \sigma_p^4} \sigma_p = \left(\frac{N_1}{\xi} \right)^{1/2} .$$

Questa dipendenza vale, entro circa il 20%, per intensità comprese tra il valore tipico 2×10^{11} e 2×10^9 e per $\xi \leq 10\%$. Naturalmente al

variare dell'intensità e dell'accoppiamento varia il campo di energia in cui le dimensioni sono determinate dall'effetto Touschek multiplo.

Nell'intervallo di energia in cui σ_p è determinato dall'irraggiamento, e quindi non dipende più nè da N nè da ξ , il coefficiente di perdita dipenderà linearmente dal rapporto (N_1/ξ) .

In fig. 2 è riportato l'andamento di CN_1 in funzione dell'energia per le condizioni tipiche di funzionamento ($N_1 = 2 \times 10^{11}$, $\xi = 1\%$, $V_{RF} = 150$ kV).

A conclusione di queste brevi considerazioni sui coefficienti di perdita, e tenendo presente l'andamento di Λ (vedere fig. 2), si può osservare che nell'intervallo di energie da 500 MeV in su la vita media può essere migliorata di un fattore dell'ordine di 2 aumentando l'accoppiamento; per energie minori di 500 MeV ciò non serve più, in quanto la limitazione è data dallo scattering singolo. Se poi la pressione totale dovesse essere maggiore di 10^{-9} torr (o la composizione del gas tale da dare uno Z^2 medio molto maggiore di quello qui assunto) lo scattering e la bremsstrahlung sul gas diverrebbero rapidamente i processi di perdita dominanti a tutte le energie (per $P = 5 \times 10^{-9}$ torr $A_{sc} + A_{br} \geq CN_1$ a tutte le energie).

IV - LA LUMINOSITA' -

La luminosità L è definita come il coefficiente che, moltiplicato per la sezione d'urto totale di un dato processo, dà il numero totale di eventi di quel processo per unità di tempo ad un incrocio. Nella espressione della luminosità vi saranno quindi le intensità dei due fasci e tutte le altre caratteristiche dei fasci stessi. Nel caso generale di due fasci con distribuzioni gaussiane nelle tre dimensioni, incrociandosi ad angolo, essendo δ il semiangolo tra le due traiettorie, ad intensità tali per cui l'interazione elettromagnetica tra i due fasci non alteri sostanzialmente le distribuzioni rispetto al caso di un fascio solo, la luminosità è data dalla seguente espressione^(9, 10):

$$(IV-1) \quad L = \frac{f}{k} \frac{N_1 N_2}{4 \pi \sigma_x \sqrt{\sigma_z^2 + (\delta \sigma_y)^2}} \quad (x) \quad \text{per } \delta \ll 1.$$

(x) - Questa espressione della luminosità è valida quando l'incrocio spaziale coincide con l'incrocio temporale; quando cioè i due centri delle distribuzioni dei due fasci passano per un punto allo stesso istante. Se ciò non avviene il valore della luminosità dato dalla IV-1 va moltiplicato per il fattore B dato dalla V-10.

Gli effetti di carica spaziale, dovuti all'interazione elettromagnetica tra i due fasci, pongono delle limitazioni al valore massimo ottenibile per la grandezza $A^{(11, 12)}$, legata all'intensità del fascio più intenso ed alle sue dimensioni dalla seguente relazione :

$$(IV-2) \quad A_1 = \frac{2 N_1 r_e}{\gamma k \sigma_x \sqrt{\sigma_z^2 + (\delta \sigma_y)^2}}$$

Sostituendo A_1 nella IV-1 si ottiene :

$$(IV-3) \quad L = \frac{\gamma f}{8 \pi r_e} A_1 N_2$$

Il valore massimo ottenibile per A_1 dipende solo dalle caratteristiche della struttura magnetica dell'anello; in linea di principio la luminosità L , una volta fissato A_1 in relazione al tipo di macchina in questione, può crescere linearmente con N_2 , a condizione che anche N_1 e il prodotto $\sigma_x \sqrt{\sigma_z^2 + (\delta \sigma_y)^2}$ crescano proporzionalmente (occorre ricordare che A è definito per il fascio più intenso, nell'ipotesi ragionevole che le dimensioni dei due fasci siano eguali). Sono quindi immediate alcune osservazioni, valide a condizione che il fascio più intenso sia in grado di dare il valore limite per A_1 , condizione soddisfatta largamente in Adone :

- a) la luminosità, a parità di energia, è proporzionale all'intensità del fascio meno intenso: non si ha quindi alcun vantaggio ad aumentare l'intensità di un fascio diminuendo quella dell'altro, ma conviene lavorare a intensità eguali;
- b) a parità di intensità la luminosità è proporzionale all'energia;
- c) per aumentare la luminosità, aumentando N_1 e N_2 ma mantenendo costante A_1 , occorre poter aumentare le dimensioni del fascio σ_x o σ_z , oppure ricorrere all'incrocio ad angolo; l'incrocio ad angolo ha il vantaggio di ridurre le dimensioni della zona di incrocio (vedere par. V), ma può essere ottenuto solo perturbando le orbite chiuse in verticale dei due fasci, limitando di conseguenza l'apertura utile della ciambella e quindi aumentando il coefficiente di perdita per scattering singolo.

A_1 è legato ai parametri della struttura magnetica dell'anello dalla relazione (valida per $\pi/2 > \mu_z > 0$, mod. π) :

$$(IV-4) \quad A_1 = \frac{2}{\beta_z} \text{sen } 2 \pi \delta Q \left\{ \text{ctg } \mu_z \text{tg } \pi \delta Q + 1 \right\}$$

dove μ_z è l'angolo di betatrone verticale tra due incroci successivi, δQ

è la variazione del numero d'onda di betatrone introdotta da ciascun incrocio e β_z è la lunghezza d'onda locale (nel centro delle sezioni diritte) delle oscillazioni di betatrone verticali. Diversi lavori sugli effetti di carica spaziale^(12, 13, 14) hanno mostrato che, al crescere di δQ al di sopra di un certo valore limite, i fasci prima aumentano di sezione, e poi non incrociano più; il parametro indipendente di tali effetti sembra essere appunto la grandezza δQ , ed il suo valore limite massimo risulta intorno a 0,1.

Dalla IV-4 si ha che, per un dato valore di δQ , A , e quindi la luminosità, sarà tanto maggiore quanto più piccolo è β_z e quanto più μ_z si avvicina a 0, mod π , dal lato dei valori positivi. Mentre β_z è essenzialmente determinato dalle dimensioni della macchina, il valore minimo di μ_z è limitato dalle imperfezioni della macchina. La struttura a funzioni separate, che permette di variare i numeri d'onda di betatrone durante il funzionamento, è stata scelta per Adone appunto allo scopo di poter diminuire μ_z sino ai limiti di stabilità dei fasci.

Vediamo ora quali valori possono assumersi ragionevolmente per μ_z e δQ , allo scopo di determinare il valore limite di A_1 , e quindi della luminosità L , sapendo che la massima intensità prevista è di 2×10^{11} part./fascio.

Si è già accennato che diversi lavori indicano in 0,1 il limite massimo per δQ ; è assai probabile che tale limite sia ottimistico, e cioè maggiore di quello ottenibile in realtà, perchè nei calcoli si deve ricorrere a modelli semplificati dell'interazione: in particolare in quelli di M. Bassetti^(12, 13), che restano tuttora i più completi ed attendibili, si considera un fascio infinito in senso radiale, e non vi sono quindi effetti di accoppiamento tra i moti radiale e verticale.

L'unico risultato sperimentale disponibile è dato dall'anello e⁻e⁻ da 500 MeV di Stanford⁽¹⁵⁾; nelle esperienze eseguite nella primavera del 1965 il δQ era $\sim 0,01$; molto probabilmente si sarebbe potuto lavorare con valori maggiori, ma la mancanza di un sistema di diagnostica rapida sul comportamento dei fasci ha consigliato al gruppo di Stanford-Princeton di mantenersi in condizioni di piena tranquillità.

E' ragionevole assumere che si possa lavorare con un valore di δQ pari a circa 0,025; per μ_z prendiamo il valore di 15° , che significa avere $Q_z = 3,08$ nel caso di due incroci, e $Q_z = 3,25$ nel caso di sei incroci (in realtà con sei incroci sarà possibile lavorare con $\mu_z \simeq 5^\circ - 10^\circ$). Poichè $\beta_z = 325$ cm nella zona di interazione, dalla IV-4 si ricava $A_1 = 1,25 \times 10^{-3}$ cm⁻¹. In queste condizioni di lavoro la luminosità risulta (vedere la IV-3) :

$$\begin{aligned}
 \text{(IV-5)} \quad L &= 1,21 \times 10^{21} N_2 A_1 \left(\frac{\gamma}{3000} \right) && (\text{cm}^{-2} \text{sec}^{-1}) \\
 &= 5,5 \times 10^{21} N_2 \left(\frac{\gamma}{3000} \right) && (\text{cm}^{-2} \text{ora}^{-1}) .
 \end{aligned}$$

Se invece prendiamo per δQ il valore limite dato dai calcoli, e cioè 0.1, mantenendo $\mu_z = 15^\circ$, avremo $A_1' = 8.4 \times 10^{-3} \text{ cm}^{-1}$, e quindi:

$$(IV-6) \quad L' = 3.7 \times 10^{22} N_2 \left(\frac{\gamma}{3000} \right) \quad (\text{cm}^{-2} \text{ora}^{-1}).$$

Per $N_2 = 2 \times 10^{11}$ si hanno quindi, come valori massimi per la luminosità a $\gamma = 3000$ rispettivamente $L = 1.1 \times 10^{33} \text{ cm}^{-2} \text{ora}^{-1}$ e $L' = 7.5 \times 10^{33} \text{ cm}^{-2} \text{ora}^{-1}$; il primo di questi due valori è considerato il valore di progetto per Adone ed esso va preso come base per la progettazione delle esperienze. L'andamento di L e di L' in funzione dell'energia è riportato in fig. 4.

Perchè sia possibile ottenere il valore della luminosità dato dalla IV-5 (o dalla IV-6) occorre che, posto $N_1 \geq N_2$, sia possibile soddisfare la IV-2. In essa vi sono quattro parametri geometrici: σ_x , σ_y , σ_z e l'angolo δ ; di questi gli unici variabili con facilità sono l'angolo di incrocio δ e la dimensione verticale σ_z (cambiando l'accoppiamento ξ). Consideriamo quindi innanzitutto il caso in cui le dimensioni radiali e longitudinali siano quelle calcolate nel par. II (v. fig. 1).

Posto $\sigma_{z\text{eq}} = \sqrt{\sigma_z^2 + (\delta \sigma_y)^2}$, in fig. 1 è riportato l'andamento in funzione dell'energia di $\sigma_{z\text{eq}}$, per $N_1 = 2 \times 10^{11}$, in corrispondenza dei due valori di A_1 , rispettivamente $A_1 = 1.25 \times 10^{-3} \text{ cm}^{-1}$ e $A_1' = 8.4 \times 10^{-3} \text{ cm}^{-1}$.

$$(IV-7) \quad \sigma_{z\text{eq}} = \frac{2 N_1 r_e}{\gamma k \sigma_x A_1}.$$

Si può osservare che, dato che σ_z può al massimo essere portato al valore $\sim 0.5 \sigma_x$ nel caso di accoppiamento completo, non si può ottenere il valore A_1 per valori di energia minori di 1.3 GeV variando soltanto l'accoppiamento (e cioè con $\delta = 0$). Vediamo quindi quale è l'angolo di incrocio necessario; essendo $\sigma_z < \delta \sigma_y$, possiamo considerare $\sigma_{z\text{eq}} \approx \delta \sigma_y$.

Si ha (ricordando la IV-2 e la II-7):

$$(IV-8) \quad \delta = \frac{\sigma_{z\text{eq}}}{\sigma_y} = \frac{2 N_1 r_e}{\gamma k \sigma_x \sigma_y A_1} = \frac{0.63 \times 10^{-5} N_1 r_e}{k \gamma^{3/2} A_1 \sigma_p^2}.$$

In fig. 5 sono riportati gli angoli di incrocio δ e δ' , corrispondenti ai due valori A_1 e A_1' , sempre per $N_1 = 2 \times 10^{11}$ (nei diagrammi di δ non si è tenuto conto del fattore $(\cos \psi_s)^{-1/2}$ che si ha in σ_y e che dà un contributo massimo, pari al 10%, a 1.5 GeV). Occorre ora parlare delle limitazioni sull'angolo di incrocio; nella configurazione tipica (che dà due zone di incrocio lungo la macchina) le relazioni tra l'an-

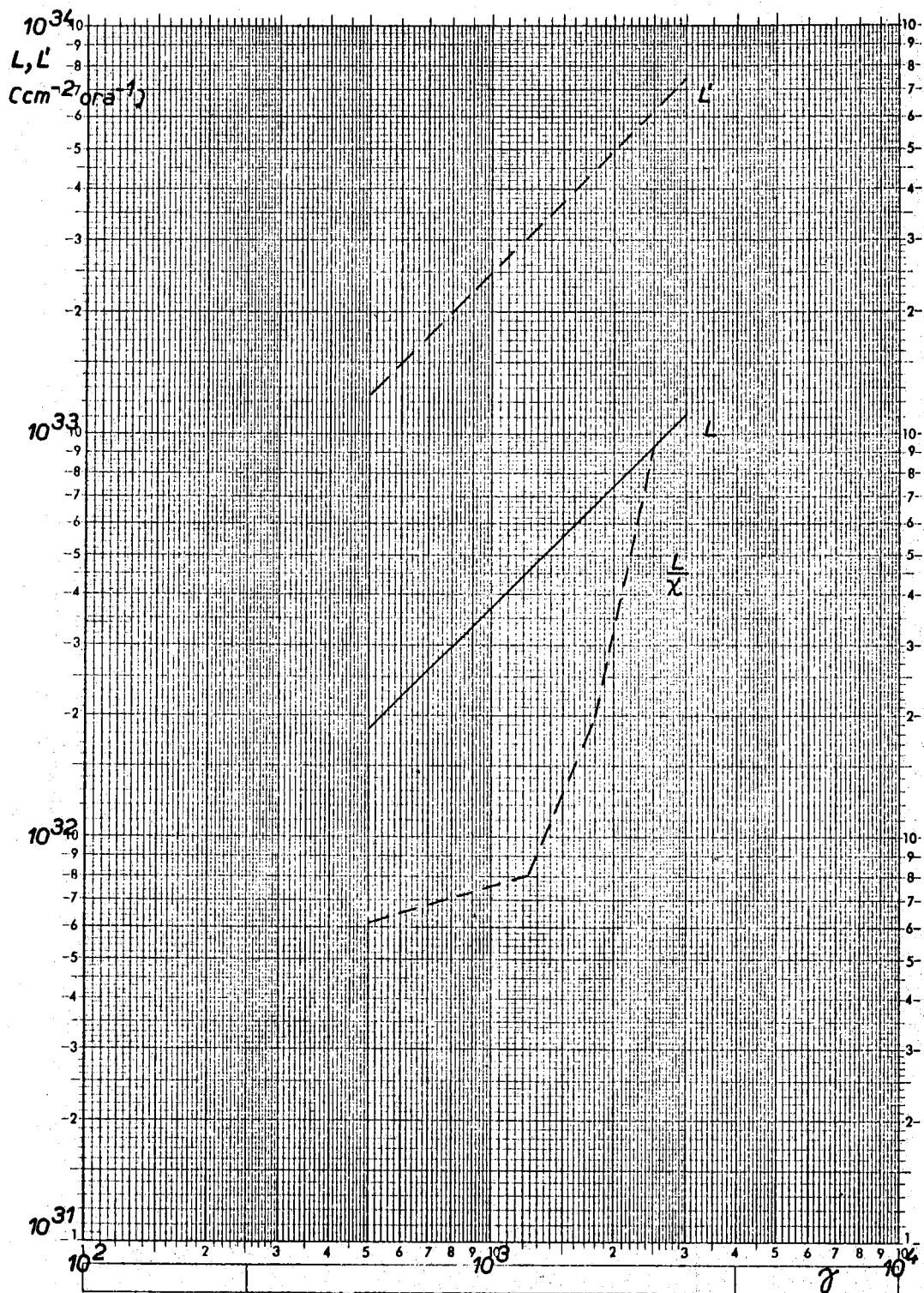


FIG. 4 - Luminosità: L nel caso di $\delta Q = 0.025$, L' per $\delta Q = 0.1$.

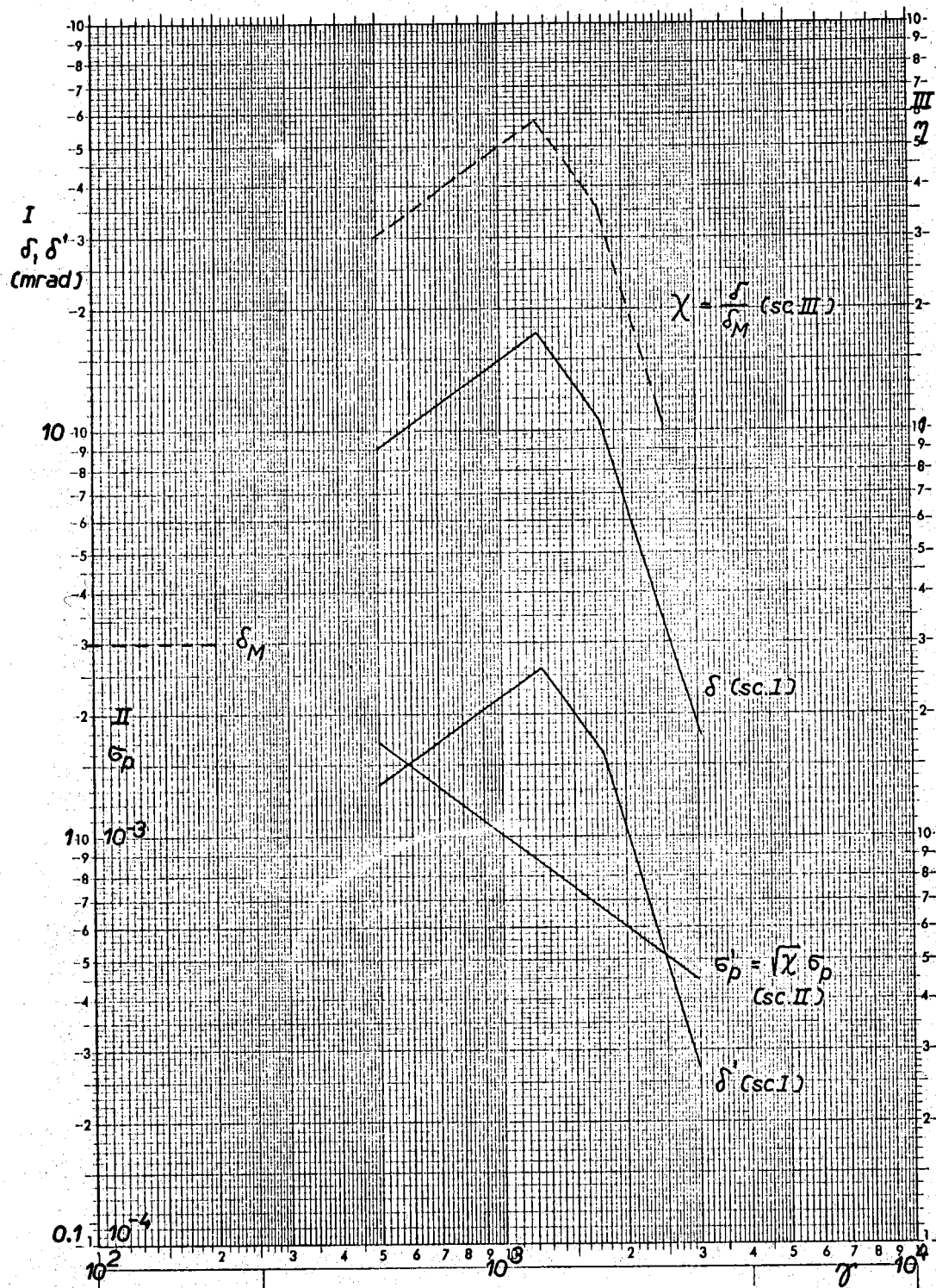


FIG. 5 - Angoli di incrocio δ e δ' per due valori del limite di carica spaziale (corrispondenti rispettivamente a $\delta Q = 0.025$ e $\delta Q = 0.1$). Coefficiente di riduzione della luminosità $\chi = \delta/\delta_M$, con $\delta_M = 3$ mrad angolo di incrocio massimo. Valore r. m. s. della distribuzione di energia σ_p' che permetterebbe di limitare l'angolo di incrocio a 3 mrad senza ridurre la luminosità (sempre per il caso con $\delta Q = 0.025$).

golo δ e la semialtezza della ciambella che resta libera (tenuto conto degli errori di allineamento), e tra δ e la tensione V_0 da applicare alle griglie sono le seguenti:

$$(IV-9) \quad b = 2.7 - 0.4 \delta \quad (\text{cm})$$

$$(IV-10) \quad V_0 = 3.75 \delta (\gamma/3.000) \quad (\text{kV})$$

avendo espresso δ in mrad.

Le due relazioni IV-9 e IV-10 ci danno le limitazioni sull'angolo di incrocio δ ; a bassa energia, se non si vuole aumentare troppo il coefficiente di perdita per scattering sul gas residuo, si deve lasciare $b \approx 1.5 + 2$ cm; alle alte energie la limitazione viene dalla massima tensione a cui possono essere portate le griglie, che è di 15 kV. Possiamo quindi assumere come valore massimo dell'angolo di incrocio $\delta_M = 3$ mrad, tenendo però presente che esso potrebbe anche essere maggiore, e giungere a 5 mrad, alle energie intermedie (γ intorno a $1000 \div 1.500$) qualora si accetti un aumento di circa un fattore ~ 3 sul coefficiente complessivo di perdita Λ , e non si usi come reazione monitor una reazione con γ a 0° (la semiapertura dell'oblò di uscita per i γ è di ~ 7.5 mrad, e quindi, con un incrocio ad angolo di 5 mrad, la semiapertura si riduce da un lato a 2.5 mrad, il che può rendere assai problematica l'accuratezza del monitor).

Dai diagrammi di fig. 5 risulta che, mentre δ' raggiunge un valore massimo di 2.6 mrad per $\gamma = 1250$ e quindi non presenta problemi, il valore di δ è maggiore di 3 mrad per tutti i valori di γ minori di 2.500 e raggiunge un valore massimo di 17 mrad. Ciò significa che, imponendo la condizione $\delta \leq 3$ mrad, e nell'ipotesi che le dimensioni del fascio siano quelle dovute all'effetto Touschek multiplo e all'irraggiamento, per mantenere $A_1 = 1.25 \times 10^{-3} \text{ cm}^{-1}$ occorre ridurre l'intensità N_1 del fattore $\delta/\delta_M = \chi$. Poichè però si è detto che A_1 va definito per il fascio più intenso, dello stesso fattore χ dovrà essere ridotta anche l'intensità dell'altro fascio, N_2 ; di conseguenza la luminosità L risulterà ridotta del fattore χ rispetto a quella ottenibile con l'intensità tipica di 2×10^{11} part/fascio (vedere IV-5).

In figura 5 è riportato il valore del coefficiente di riduzione χ , per $A_1 = 1.25 \times 10^{-3} \text{ cm}^{-1}$ e $\delta_M = 3$ mrad, ed in fig. 4 è riportata, tratteggiata, la funzione L/χ , limitatamente alla zona in cui $\chi \geq 1$.

Quali possibilità vi sono per aumentare il valore della luminosità alle energie intermedie, qualora il limite su A_1 risultasse assolutamente non innalzabile oltre il valore assunto come dato di progetto? La IV-8 mostra la dipendenza dell'angolo di incrocio dalle dimensioni dei fasci; si può osservare in particolare che $\delta \sim \sigma_p^{-2}$.

E' chiaro quindi che una via per ottenere il risultato voluto, e cioè la riduzione di δ di un fattore χ , consiste nell'aumentare artificialmente

σ_p al valore $\sigma_p' = \sqrt{\chi} \sigma_p$, che può ricavarsi direttamente dalla IV-8, ponendo l'angolo di incrocio eguale a $\delta_M = 3$ mrad:

$$(IV-11) \quad \sigma_p' = \sqrt{\chi} \sigma_p = \frac{0.176}{\gamma^{3/2}}$$

L'aumento delle dimensioni, o della dispersione in energia deve essere incoerente; deve ottenersi cioè un allargamento della distribuzione di posizioni quale risulta da una misura effettuata ad un singolo passaggio del fascio, e non mediata nel tempo; non si può quindi ricorrere a processi che agiscano collettivamente sul pacchetto di particelle.

Una proposta di incremento incoerente di σ_p , fatta recentemente da C. Pellegrini, è allo studio e sembra promettente.

In conclusione si ritiene abbastanza probabile che si riesca ad ottenere per la luminosità i valori della curva L a tratto pieno della fig. 4; questi valori possono quindi essere assunti come dati tipici per Adone.

V - CARATTERISTICHE DEI FASCI ALL'INCROCIO -

a) Incrocio ad angolo.

Come si è accennato nel par. IV, nella camera da vuoto vi sono delle griglie che, portate a tensioni opportune, danno un campo elettrico verticale sulla traiettoria dei due fasci; tale campo differenzia, in verticale, le traiettorie degli elettroni da quelle dei positroni. La distribuzione dei campi elettrici lungo la circonferenza della macchina è tale da far sì che le due traiettorie si incrocino in una delle tre coppie di sezioni diritte in cui il passaggio di un pacchetto di e^+ e di uno di e^- avviene contemporaneamente. Poichè le sezioni diritte per le esperienze sono quattro, sarà possibile fare in modo che l'incrocio dei fasci avvenga in due di esse, oppure nelle altre due, ciò che rende possibile il lavoro contemporaneo di due esperienze.

Nel caso di incrocio ad angolo zero, i fasci si incrociano sempre in tutte e sei le sezioni diritte in cui si ha contemporaneità di passaggio.

Oltre ai campi elettrici per l'incrocio ad angolo, vi saranno, in alcune zone dell'anello, dei campi elettrici che possono spostare azimuthalmente la zona di interazione (nel caso di incrocio ad angolo) di ± 1 metro rispetto alla mezzeria della sezione diritta; essi potranno quindi essere usati per muovere, relativamente uno all'altro, i due fasci in modo che essi non si incrocino, pur restando sostanzialmente inalterata la geometria (gli spostamenti sono dell'ordine di 1 mm in verticale), saranno cioè utili per il controllo dei fondi su un apparato sperimentale, in condizioni praticamente eguali a quelle di normale operazione.

b) Incrocio temporale dei fasci.

I sei punti lungo la circonferenza dell'anello nei quali il passaggio dei centri di un pacchetto di e^+ e di uno di e^- è simultaneo sono definiti dalle cavità a radiofrequenza.

Se vi fosse una sola cavità, oppure più cavità, ma con i gaps ad una di stanza pari ad un numero intero di mezze lunghezze d'onda (o, ciò che è lo stesso, ad un angolo meccanico pari a $n\pi$ elettrici), i punti di incrocio nel tempo resterebbero immutati al variare della tensione della o delle cavità e delle fasi relative del campo elettrico acceleratore.

In Adone vi sono due coppie di cavità; ciascuna coppia è formata da due cavità i cui gaps sono distanti circa 2 metri, pari a circa 21° elettrici. Con questa disposizione variazioni di tensione delle cavità e variazioni delle fasi relative provocano spostamenti del punto di incrocio nel tempo, spostamenti che divengono cospicui per energie maggiori di 1.000 MeV.

Per calcolare il punto di incrocio temporale si impone che i centri dei pacchetti dei due fasci, circolando nei due versi, vedano ambedue un integrale del campo elettrico, dato dalle varie cavità, eguale alla perdita media di energia per irraggiamento. Le due equazioni che così si ottengono definiscono univocamente il punto di incrocio temporale dei centri dei pacchetti in funzione della tensione e delle fasi delle cavità.

Lo spostamento del punto di incrocio d'_0 , qualora vi fosse una sola coppia di cavità, è dato dalla seguente espressione approssimata:

$$(V-1) \quad d'_0 = \frac{1}{2} \left[\frac{\delta V}{V_0} + \frac{1}{2} \operatorname{tg} \psi_s \right]$$

dove

$$\delta V = \frac{1}{2} (V_1 - V_2); \quad V_0 = \frac{1}{2} (V_1 + V_2)$$

essendo V_1 e V_2 le tensioni al gap di due cavità di una stessa coppia; ξ lo sfasamento tra le due cavità; l la distanza tra i gaps di una coppia di cavità; ω la frequenza delle cavità; $\psi_s = 1/2(\psi_s^+ + \psi_s^-)$, cioè il valore medio delle fasi sincrone dei due fasci.

L'approssimazione è valida per $\delta V/V_0 \ll 1$; $\xi \ll 1$; $\omega l/c \ll 1$; $\xi(\omega l/4c) \operatorname{tg}^2 \psi_s \ll 1$.

Calcolato l'effetto degli spostamenti d'_0 e d''_0 dovuti a ciascuna delle due coppie di cavità, considerate separatamente, ad ogni coppia può essere sostituita una cavità ideale, poste rispettivamente a distanze d'_0 e d''_0 dai punti di simmetria meccanica delle cavità reali, e con gli opportuni valori per la tensione, si può poi calcolare lo spostamento complessivo dovuto alla presenza di tutte e quattro le cavità.

Il caso peggiore si ha quando le due coppie di cavità danno, ciascuna di esse, lo stesso valore per lo spostamento, cioè per $d'_0 = d''_0$; in tal caso lo spostamento complessivo d_0 del punto di incrocio temporale sarà eguale a d'_0 e a d''_0 .

In Adone $l = 2 \text{ m}$ e $(\omega l)/c = (kl)/R = 0.36 \text{ rad} = 21^\circ$; alla massima energia $\text{tg } \varphi_s = 0.75$ (mentre a 1.000 MeV $\text{tg } \varphi_s = 0.1$); come si vede dalla V-1 lo spostamento del punto di incrocio temporale risulta dalla somma di due termini, il primo dei quali è indipendente dall'energia e dallo sfasamento ξ , e dipende solo dalle differenze di tensione; il secondo è invece proporzionale allo sfasamento e alla tangente della fase sincrona media. Questo secondo termine diviene dominante alle alte energie. Assumendo $|\xi| \leq 5^\circ \sim 0.1 \text{ rad}$ e $|\delta V/V_0| \leq 0.05$ si ha a 1500 MeV :

$$(V-2) \quad |d_0| \leq \frac{1}{2} \left[\frac{\delta V}{V_0} + \frac{\xi}{2} \text{tg } \varphi_s \right] = 100 [0.05 + 0.038] \approx 9 \text{ cm}.$$

Per energie inferiori a 1.000 MeV :

$$(V-3) \quad |d_0| \lesssim 5 \text{ cm}.$$

L'impianto a radiofrequenza è realizzato in modo che gli sfasamenti relativi tra due cavità di una stessa coppia siano inferiori od eguali a 5° elettrici, e che la massima differenza di tensione tra di esse sia inferiore al 10% (ciò che significa $\delta V/V_0 \leq 5\%$).

Occorre osservare che, avendo più cavità a distanze diverse da un multiplo di π , può accadere che l'integrale del campo accelerante su un giro visto dal fascio di e^+ sia diverso da quello visto dal fascio di e^- : ciò porta come conseguenza che le frequenze delle oscillazioni di sincrotrone potranno essere diverse per i due fasci. Le massime differenze tra i due integrali del campo accelerante su un giro sono di ordine

$$\frac{\xi}{2} \frac{\omega l}{c} \approx 0.2 \xi,$$

e quindi le massime differenze relative tra le due frequenze di sincrotrone (proporzionali alla radice quadrata dell'integrale del campo sul giro) sono dell'ordine di $\sim 0.1 \xi$.

c) Dimensioni della zona di interazione.

Consideriamo il caso più generale dell'incrocio ad angolo; i due fasci siano in moto uno con velocità $+c$ e traiettoria diretta come y' , l'altro con velocità $-c$ e traiettoria diretta come y'' (vedi fig. 6). I due fasci abbiano una distribuzione di densità gaussiana nelle tre direzioni radiale, azimutale e verticale (rispettivamente x', y', z' e x'', y'', z''); le dimensioni r. m. s. in ciascuna delle tre direzioni siano le stesse per

i due fasci σ_x , σ_y e σ_z .

Le due distribuzioni di densità in funzione delle coordinate spaziali e del tempo saranno :

$$(V-4) \quad P_1 \sim \exp - \frac{1}{2} \left\{ \frac{(y' - d_0 - ct)^2}{\sigma_y^2} + \frac{x'^2}{\sigma_x^2} + \frac{z'^2}{\sigma_z^2} \right\}$$

$$P_2 \sim \exp - \frac{1}{2} \left\{ \frac{(y'' - d_0 + ct)^2}{\sigma_y^2} + \frac{x''^2}{\sigma_x^2} + \frac{z''^2}{\sigma_z^2} \right\} .$$

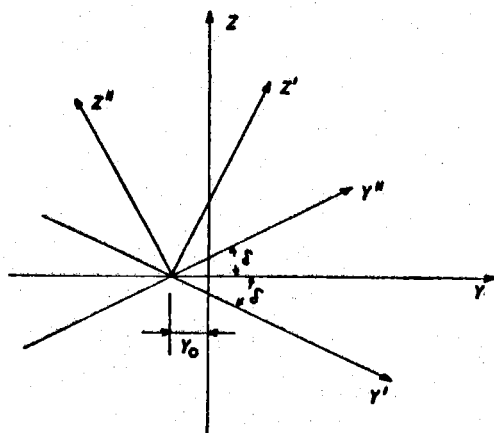


FIG. 6 - Zona di interazione

In queste espressioni si fa l'ipotesi che i centri delle due distribuzioni non passino contemporaneamente nel punto di incrocio delle traiettorie ($z' = z'' = 0$), ma che all'istante $t = 0$ essi siano nei punti $y' = y'' = d_0$; si fa cioè l'ipotesi più generale di incrocio temporale spostato rispetto all'incrocio spaziale.

La luminosità all'incrocio sarà proporzionale al prodotto delle due distribuzioni integrato su t da $-\infty$ a $+\infty$; l'espressione IV-1 dà appunto la luminosità totale dell'incrocio (cioè con successiva integrazione lungo y da $-\infty$ a $+\infty$) nel

caso $d_0 = 0$; ciò che interessa ora determinare è la geometria della sorgente, cioè le caratteristiche della distribuzione

$$\int_{-\infty}^{+\infty} P_1 P_2 dt ,$$

tenendo anche conto del fatto che $d_0 \neq 0$.

Operando il cambiamento di variabili, nell'ipotesi che $\delta \ll 1$:

$$x' = x'' = x$$

$$y' = y + y_0 + \delta z ;$$

$$y'' = y + y_0 - \delta z$$

$$z' = -(y + y_0)\delta + z ;$$

$$z'' = (y + y_0)\delta + z$$

si ha :

$$(V-5) \quad P(x, y, z) = \int_{-\infty}^{+\infty} P_1 P_2 dt \sim \left[\exp - \left\{ \frac{x^2}{\sigma_x^2} + y^2 \left(\frac{1}{\sigma_y^2} + \frac{\delta^2}{\sigma_z^2} \right) + \right. \right.$$

$$(V-5) \quad + \frac{z^2}{\sigma_z^2} + 2y \left(\frac{y_0 - d_0}{\sigma_y^2} + \frac{y_0 \delta^2}{\sigma_z^2} \right) + \frac{(y_0 - d_0)^2}{\sigma_y^2} + \\ + \frac{\delta^2 y_0^2}{\sigma_z^2} \left. \right\} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp - \frac{(\delta z - ct)^2}{\sigma_y^2} \text{ alt}$$

L'ultimo integrale contribuisce solo alla normalizzazione; determiniamo y_0 in modo che si annulli il termine in y che compare nell'esponentiale; si avrà:

$$(V-6) \quad y_0 = \frac{\sigma_z^2}{\sigma_z^2 + \delta^2 \sigma_y^2} d_0$$

che, sostituito nella V-5, dà

$$(V-7) \quad P(x, y, z) \sim \exp - \left\{ \frac{x^2}{\sigma_x^2} + y^2 \left(\frac{1}{\sigma_y^2} + \frac{\delta^2}{\sigma_z^2} \right) + \frac{z^2}{\sigma_z^2} + \frac{\delta^2 d_0^2}{\sigma_z^2 + \sigma_y^2 \delta^2} \right\}$$

Quindi la distribuzione di sorgente è ancora gaussiana nelle tre direzioni x , y , e z ; le sue dimensioni r.m.s. indicate con σ_x^* , σ_y^* e σ_z^* , risultano:

$$(V-8) \quad \sigma_x^* = \frac{1}{\sqrt{2}} \sigma_x \\ \sigma_y^* = \frac{\sigma_z}{\sqrt{2} \left[\left(\frac{\sigma_z}{\sigma_y} \right)^2 + \delta^2 \right]^{1/2}} \\ \sigma_z^* = \frac{1}{\sqrt{2}} \sigma_z$$

Il centro della distribuzione di sorgente risulta spostato, rispetto al punto di incrocio delle traiettorie dei fasci, della quantità:

$$(V-9) \quad y_0 = \left(\frac{\sigma_z}{\sigma_y} \right)^2 \frac{d_0}{\left(\frac{\sigma_z}{\sigma_y} \right)^2 + \delta^2} = 2 d_0 \left(\frac{\sigma_y}{\sigma_x^*} \right)^2$$

e la luminosità risulta attenuata, rispetto al caso $d_0 = 0$, del fattore:

$$(V-10) \quad B = \exp - \left(\frac{d_0}{\sigma_y}\right)^2 \frac{\delta^2}{\left(\frac{\sigma_z}{\sigma_y}\right)^2 + \delta^2}$$

Consideriamo i due casi: $\sigma_z < \delta \sigma_y$, incrocio ad angolo, e $\sigma_z > \delta \sigma_y$ ($\delta \approx 0$) incrocio ad angolo zero. Si ha:

Incrocio ad angolo:

$$\sigma_x^* = \frac{1}{\sqrt{2}} \sigma_x; \quad \sigma_y^* \approx \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\sigma_z}{\delta}; \quad \sigma_z^* = \frac{1}{\sqrt{2}} \sigma_z$$

(V-11)

$$y_0 \approx \left(\frac{\sigma_z}{\delta \sigma_y}\right)^2 d_0 = \left(\frac{\sigma_z}{\sigma_{zeq}}\right)^2 d_0; \quad B \approx \exp - \left(\frac{d_0}{\sigma_y}\right)^2$$

Incrocio ad angolo zero:

$$\sigma_x^* = \frac{1}{\sqrt{2}} \sigma_x; \quad \sigma_y^* \approx \frac{1}{\sqrt{2}} \sigma_y; \quad \sigma_z^* = \frac{1}{\sqrt{2}} \sigma_z$$

(V-12)

$$y_0 \approx d_0; \quad B \approx 1.$$

Le V-11 e V-12 mostrano vantaggi e svantaggi dei due tipi di incrocio, dal punto di vista delle caratteristiche geometriche della zona di interazione. E' evidente che, a parità di luminosità, l'incrocio ad angolo offre molti vantaggi rispetto all'incrocio ad angolo zero; da notare soprattutto che un moto relativo del punto di incrocio temporale rispetto a quello spaziale ($d_0 \neq 0$) dà, nel caso di incrocio ad angolo, una riduzione di luminosità, ma uno spostamento assai ridotto del centro della sorgente; nell'incrocio ad angolo zero non si ha attenuazione ma il centro della sorgente subisce uno spostamento eguale a d_0 .

Nell'applicare queste formule per calcolare le dimensioni della sorgente, occorre una cautela per quanto riguarda la dimensione verticale del fascio σ_z (che nel caso di incrocio ad angolo determina le dimensioni azimutali della sorgente). Le dimensioni verticali calcolate al par. II sono le minime ottenibili a causa degli errori di allineamento; per varie ragioni (ad esempio per migliorare la vita media) potrebbe convenire lavorare con dimensioni verticali maggiori; potrebbe inoltre accadere che in verticale vi fossero delle oscillazioni coerenti con ampiezze ≈ 0.1 mm.

Per queste ragioni si consiglia di assumere, per σ_z , nel calcolo delle dimensioni azimutali della zona di interazione, dei valori 10 volte maggiori dei valori minimi dati al par. II.

d) Distribuzioni di angoli e di energie all'incrocio.

Per le esperienze a piccoli angoli ha importanza conoscere la distribuzione degli angoli rispetto alla traiettoria media in ciascuno dei due fasci; in assenza di oscillazioni coerenti la distribuzione in angoli è proporzionale alla distribuzione delle posizioni di betatrone, ed il coefficiente di proporzionalità è la grandezza β , caratteristica della struttura magnetica a foccheggiamento forte. I valori r. m. s. degli angoli θ_x e θ_z , essendo in Adone, nella zona di interazione, $\beta_x = 8.95$ m e $\beta_z = 3.25$ m, sono dati dalle:

$$(V-13) \quad \theta_x = 0.82 \frac{\sigma_x}{\beta_x} = 0.091 \frac{\sigma_x}{\text{mm}} \quad (\text{mrad})$$

$$(V-14) \quad \theta_z = \frac{\sigma_z}{\beta_z} = 0.5 \xi \frac{\sigma_x}{\beta_z} = 0.15 \xi \frac{\sigma_x}{\text{mm}} \quad (\text{mrad})$$

con σ_x in mm.

Il coefficiente 0.82 in θ_x è dovuto al fatto che, mentre alle dimensioni del fascio contribuiscono sia le oscillazioni di sincrotrone che quelle di betatrone, gli angoli sono dovuti solo a queste ultime.

Se invece i fasci avessero delle oscillazioni coerenti, con ampiezza maggiore di σ_x e di σ_z , ad ogni incrocio l'angolo medio del fascio sarebbe diverso, con una distribuzione nel tempo simile alla funzione di distribuzione delle velocità di un oscillatore armonico.

Interessa inoltre determinare la distribuzione della somma delle energie di due particelle collidenti; a questo scopo si calcola la probabilità che la somma degli scarti in energia, rispetto all'energia della particella sincrona, di un e^+ e un e^- , incrociandosi ad una distanza x dall'orbita centrale, sia $\eta = (p_1 + p_2) E_s$.

Indicando con $x_{1\beta}$ e $x_{2\beta}$ gli scostamenti dall'orbita centrale dovuti alle oscillazioni di betatrone, con x_{1s} e x_{2s} gli scostamenti dovuti alle oscillazioni di sincrotrone, potremo scrivere le seguenti relazioni:

$$(V-15) \quad x_{1s} + x_{1\beta} = x_{2s} + x_{2\beta} = x$$

$$x_{1s} + x_{2s} = \psi (p_1 + p_2) = \psi \frac{\eta}{E_s}$$

$$\begin{aligned}
 x_{1\beta} &= x - x_{1s} \\
 (V-16) \quad x_{2s} &= \frac{\psi}{E_s} \eta - x_{1s} \\
 x_{2\beta} &= x - x_{2s} = x + x_{1s} - \frac{\psi}{E_s} \eta
 \end{aligned}$$

La probabilità che la somma delle energie di due particelle collidenti differisca da $2 E_s$ della quantità η è data da:

$$(V-17) \quad P(\eta) \sim \iint \exp - \frac{1}{2} \left\{ \frac{x_{1s}^2 + x_{2s}^2}{2 \sigma_{xs}^2} + \frac{x_{1\beta}^2 + x_{2\beta}^2}{2 \sigma_{x\beta}^2} \right\} dx dx_{1s}$$

dove σ_{xs} e $\sigma_{x\beta}$ sono i valori r.m.s. delle distribuzioni di posizioni radiali di sincrotrone e di betatrone: $\sigma_{xs}^2 + \sigma_{x\beta}^2 = \sigma_x^2$.

Sostituendo nella V-17 le V-16 ed integrando su x e x_{1s} si ottiene:

$$(V-18) \quad P(\eta) \sim \exp - \frac{1}{2} \left(\frac{\psi^2}{2E_s^2 \sigma_{xs}^2} \right) \eta^2$$

da cui:

$$(V-19) \quad \langle \eta^2 \rangle^{1/2} = \sqrt{2} \frac{E_s \sigma_{xs}}{\psi} = \sqrt{2} E_s \sigma_p$$

Se chiamiamo ora σ_p^x il valore r.m.s. degli scarti relativi dell'energia totale nel baricentro rispetto a $2 E_s$, si ha:

$$(V-20) \quad \sigma_p^x = \frac{\langle \eta^2 \rangle^{1/2}}{2E_s} = \frac{\sigma_p}{\sqrt{2}}$$

relazione analoga a quelle che danno le dimensioni della sorgente in funzione delle dimensioni di un fascio.

Dai valori di σ_p , diagrammati in fig. 1, si vede che σ_p^x è compreso tra 2.5×10^{-4} e 6×10^{-4} ; se σ_p dovesse essere artificialmente aumentato, per aumentare la luminosità, di altrettanto aumenterebbe σ_p^x .

Le considerazioni fatte sinora non hanno tenuto conto di eventuali oscillazioni coerenti di sincrotrone; la presenza di queste darebbe una distribuzione delle energie totali nel baricentro, mediata nel tempo, più larga di quella ora calcolata. Dai risultati sperimentali disponibili sembra che si possano evitare oscillazioni coerenti di sincrotrone usando oppor-

tune cautele nell'impianto a radiofrequenza.

e) Movimenti casuali della zona di interazione.

Esaminiamo ora i possibili movimenti casuali della zona di interazione.

La posizione in verticale (lungo z) dipende dagli errori di allineamento (o da eventuali campi magnetici trasversi): questi non dovrebbero dipendere dal tempo, almeno su brevi periodi. E' possibile che l'installazione di nuovi grossi apparati sperimentali nei pressi dell'anello, alteri le orbite chiuse; sarà possibile però controllarle, nel centro delle sezioni diritte, con una accuratezza sulle posizioni di $\sim \pm 1$ mm e sugli angoli di $\sim \pm 0.5$ mrad (si intende l'angolo del piano mediano rispetto ad un piano orizzontale). Al variare dell'energia non vi dovrebbero essere movimenti in verticale della zona di interazione superiori a $\sim \pm 0.5$ mm. Oscillazioni verticali coerenti in fase dei due fasci potrebbero dare, nel caso di incroci o ad angolo zero, un rapido moto in verticale della zona di interazione; il baricentro rimarrebbe comunque fermo, e l'effetto sarebbe equivalente ad una maggior dimensione della sorgente. Le ampiezze di queste eventuali oscillazioni coerenti dovrebbero essere comunque contenute ben al disotto di 1 mm.

La posizione radiale (lungo x) della zona di interazione dipende, oltre che dagli errori di allineamento della struttura magnetica (per i quali vale tutto il discorso fatto più sopra per gli spostamenti verticali), anche dalla frequenza della radiofrequenza e dalla lunghezza magnetica dei magneti curvanti. Ad una variazione Δf della frequenza della radiofrequenza f_{RF} corrisponde una variazione relativa di energia dei fasci p e uno spostamento radiale Δx , nelle sezioni diritte, date da:

$$(V-21) \quad p = -\frac{1}{\alpha} \frac{\Delta f}{f_{RF}}$$

$$(V-22) \quad \Delta x = \psi p = -\frac{\psi}{\alpha} \frac{\Delta f}{f} = 3.12 \times 10^4 \frac{\Delta f}{f} \quad (\text{mm})$$

poichè in Adone, nelle sezioni diritte, $\psi = 1.91$ m e $\alpha = 6.12 \times 10^{-2}$.

La frequenza della radiofrequenza è stabile a $\sim 10^{-5}$, quindi gli spostamenti radiali corrispondenti saranno dell'ordine di ± 0.3 mm.

Al variare dell'energia, e quindi del campo magnetico nei magneti curvanti, la loro lunghezza magnetica varia, per effetto della saturazione alle estremità, soprattutto nella zona tra 1.3 GeV e 1.5 GeV; il massimo accorciamento della lunghezza magnetica di un magnete è prevedibile sia dell'ordine di 2 cm, passando da 500 MeV a 1.500 MeV, cui corrisponde⁽⁵⁾ una semiampiezza dell'orbita chiusa di ~ 3 mm; lo spostamento radiale

della zona di interazione risulta essere dello stesso ordine.

Questo spostamento può essere compensato da una corrispondente variazione della frequenza della radiofrequenza, variazione che dalla V-22 risulta pari a $\sim 10^{-4} f_{RF}$.

Gli spostamenti azimutali (lungo y) della zona di interazione sono di due tipi: movimento dell'incrocio spaziale (punto di incrocio delle traiettorie dei due fasci) e movimento dell'incrocio temporale. Di quest'ultimo abbiamo già diffusamente parlato in questo paragrafo ai punti b) e c) precedenti, osservando come l'incrocio ad angolo riduca di molto gli effetti di uno spostamento dell'incrocio temporale.

Il punto di incrocio delle traiettorie è definito solo nell'incrocio ad angolo, poichè quando l'angolo va a zero le traiettorie dei due fasci coincidono su tutta la loro estensione; la posizione dell'incrocio dipende dalla distribuzione dei campi elettrici lungo l'anello. Poichè le griglie saranno alimentate tutte dalla stessa coppia di alimentatori, una loro variazione di tensione cambia l'angolo di incrocio, ma non la posizione dell'incrocio; quest'ultima viene a dipendere essenzialmente dalla stabilità meccanica delle griglie stesse. Indicativamente si può dire che se la distanza verticale tra due griglie varia di ± 0.3 mm, la posizione azimutale dello incrocio può variare, nella peggiore delle ipotesi, di circa ± 3 mm. Tenuto conto della struttura meccanica delle griglie e delle possibili sorgenti di vibrazioni, non si dovrebbero assolutamente superare i valori sopracitati per lo spostamento azimutale del punto di incrocio delle traiettorie.

Concludendo si può dire che, nel caso dell'incrocio ad angolo, il centro della zona di interazione dovrebbe essere stabile nel tempo entro ~ 1 mm in radiale e verticale ed entro circa $\pm 3 \div 30$ mm in azimut (i valori molto diversi dipendono dalle condizioni di operazione); nel caso di incrocio ad angolo zero, la stabilità in radiale e verticale rimane la medesima, mentre in azimut gli spostamenti possibili della posizione del centro della sorgente passano a $\pm 50 \div 100$ mm, a seconda dell'energia.

BIBLIOGRAFIA -

- (1) - Adone - The Frascati 1.5 GeV electron-positron storage ring. Labo
ratori Nazionali di Frascati, LNF 65/26 (30.8.65); Presentata alla
V Int. Conf. on High Energy Accelerators, Frascati 1965.
- (2) - L. Mango, Parametri di Adone e campi elettrici per l'incrocio ad an
golo. LNF/Int-65/7 (1965).
- (3) - C. Pellegrini, A calculation of radiation effects on electron oscilla
tions in a circular accelerator. Suppl. Nuovo Cimento 22, 603 (1961).
- (4) - H. Bruck et J. Le Duff, L'effet Touschek des chocs multiples. Elar-
gissement du faisceau et pertes de particules, Labor. Accel. Lin.,
Orsay, Rap. Techn. 24-64 (8.7.64).
J. Le Duff, Etude de quelques phénomènes stochastiques dans les
anneaux de stockage, These Orsay (Aprile 1965).
- (5) - L. Mango, Effetto degli errori negli elementi della struttura magne-
tica di una macchina acceleratrice a funzioni separate. LNF 64/1
(16.1.64).
- (6) - C. Bernardini et al., Lifetime and beam size in electron storage rings.
Proceed. of the Dubna Conf. on High Energy Accelerators 1963 (Ato
mirdat, Moscow, 1964) pag. 332.
- (7) - H. Bethe et J. Ashkin, Passage of radiation through matter, in Expe
riental Nuclear Physics, E. Segre Editor - (Wiley & Sons - New
York 1953) vol. I, pag. 166.
- (8) - L. Mango and C. Pellegrini, Bremsstrahlung mean life of electron and
positron beams in a storage ring. LNF/Int-63/6 (1963).
- (9) - C. Bernardini et al., Measurements of the rate of interaction between
stored electrons and positrons. Nuovo Cimento 34, 1473 (1964).
- (10) - J.E. Augustin, Taux de comptage en faisceaux croises. Lab. Accel.
Lineaire - Orsay. Rap. Techn. 38-64 (30.11.64).
- (11) - F. Amman and D. Ritson, Space charge effects in electron-electron
and positron-electron colliding or crossing beam rings, Proc. of the
Brookhaven Intern. Confer. on High Energy Accel. (1961) pag. 471.
- (12) - M. Bassetti, Calcoli numerici sugli effetti di carica spaziale in un a-
nello di accumulazione per elettroni e positroni. LNF 62/35 (1962).
- (13) - M. Bassetti, Numerical computations of space charge effects in a po
sitron - electron storage ring. Presentato alla V Int. Conf. on High E
nergy Accelerators, Frascati 1965.
- (14) - E. Courant, Proceed. of the Particle Accel. Conf., Washington, (1965),
pag. 550.
- (15) - W.C. Barber et al., Data on quantum electrodynamics from the Prin
cton-Stanford colliding-beam experiment. Presentata alla V Int. Conf.
on High Energy Accelerators, Frascati 1965.